

Sec (10) ← مقدمة في المعرفة

→ upper approximation of Complex Integration:-

التقريب العلوي للتكامل المركب:-

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x_r) \cdot \Delta x_r \quad \rightarrow ①$$

خطوة التقسيم على محور  $x$  بين الفتره  $[a, b]$

من معنى التكامل المحدد يمكن ديجاد فيه تقريبه للعدد العلوي من ذلك باستخدا المجموع (1) عند توجهه نحوه مركبة.

$$\int_c f(z) dz = \lim_{\Delta z_r \rightarrow 0} \sum f(z_r) \Delta z_r$$

$$\left| \int_c f(z) dz \right| = \left| \lim_{\Delta z_r \rightarrow 0} \sum f(z_r) \Delta z_r \right|$$

$$\leq \lim_{\Delta z_r \rightarrow 0} \sum |f(z_r)| |\Delta z_r|$$

$$\leq \int_c |f(z)| |dz|$$

ـ يوصى قيمة  $M$  تكون أكبر قيمة للدالة على المنحنى  $C$  باركسل

$$|f(z)| < M$$

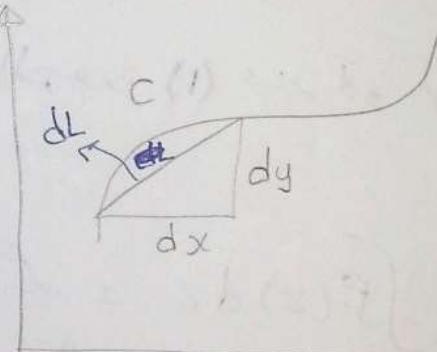
$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \int_C |dz|$$

$$z = x + iy$$

$$dz = dx + idy \quad , \quad |dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

ـ جزء من المنحنى  $C$  في  $dx$  و  $dy$  عند ما  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$\therefore dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M L$$

ـ طول المنحنى  $L$

### Example

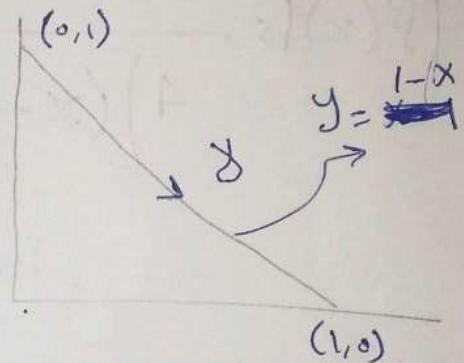
→ Let  $\gamma$  denote the line segment from  $z=i$

to  $z=1$ . show that  $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4\sqrt{2}$

solution

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leq ML$$

$$L(\gamma) = \sqrt{2}$$



$$\left| F(z) \right| \leq \left| \frac{1}{z^4} \right| = \frac{1}{|z^4|}$$

$$|z^4| \leq |z|^4 = (\sqrt{x^2+y^2})^4 = (x^2+y^2)^2$$

معادلة المترى

معادلة المترى

$$= \left[ x^2 + (1-x)^2 \right]^2 \leq \left[ x^2 + 1 - 2x + x^2 \right]^2$$

$$= 4 \left[ x^2 - x + \frac{1}{2} \right]^2$$

إكمال مربع

$$(جذر الأول الإسقاط = \frac{1}{2} \text{ معامل الثاني} - \left( \frac{1}{2} \text{ معامل الثاني} \right)^2 + \text{باقي})$$

$$|z^4| = 4 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right]^2$$

$$= 4 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]^2$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{4 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]^2} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{أعلى قيمة المقدار}$$

$$|f(z)| \leq 4$$

$$\left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M L$$

$$\leq 4\sqrt{2}$$

Home work

$$\text{Show that } \left| \oint_{\gamma} (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 6.$$

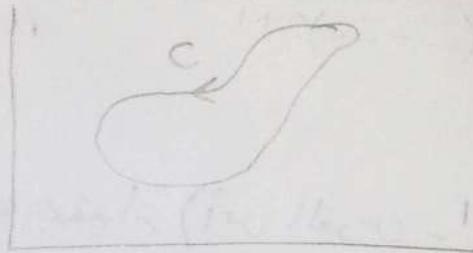
where  $\gamma$  denote the boundary of triangle with vertices  $z=0, z=-1$  and  $z=3i$

في هذا الجزء :-

ـ ندرس قواعد التكامل التي تحسب يمحى التكامل ببطءاً  
بسطة و هنا يستوجب أن تكون الدالة **analytic** و معرفة  
على منحنى مغلق .

1) if  $f(z)$  is analytic on simple closed  
curve (s.c.c) then

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



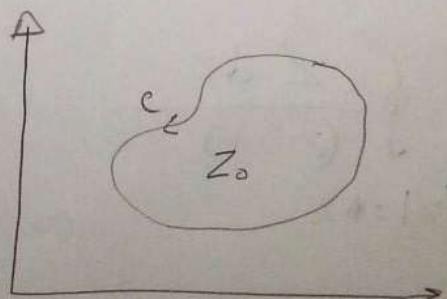
ـ معنـى منـحنـى مـغـلـقـ لا يـقـطـعـ (simple closed curve) .

نفسـةـ وـ الدـالـةـ ~~وـ~~ـ التـكـاملـ لاـ يـوجـدـ لـهـ أـنـهـارـ الـفـارـزـ مـقـيـاسـ

ـ اوـ صـرـافـهـ ئـىـ تـحـقـقـ شـرـطـاـ لـاـ

2) If  $f(z)$  is analytic on s.c.c then

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



5] Lec 10

ـ إذا كانت المالة  $f(z)$  لا يوجد لها أصلعات للفيما داً خل  
المتحنى  $\mathcal{C}$  ولا تحتوى على مقياس أو صرا فور فإنه التكامل يمكن  
حسابه بمفرد (النهر)، لتشيل حفر المقام من تحت ونحوه  
بـه خوفه ونهره في  $\pi/2$ .

3 If  $f(z)$  is analytic on S.C.C then

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0}$$

ـ لحساب التكامل فنأخذ الدالة بقدر (أو القوس - ١)

وتحتوى بعمر المقامى ناتج المقاييس ونجزى الناتجى

Example Evaluate.

$$\boxed{\text{II}} \quad \oint_{|z|=1} \sin z \, dz$$

$$\boxed{25} \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)}$$

$$\boxed{3} \quad \int \frac{z^2 dz}{(z-1)}$$

$$\boxed{4} \quad \int \frac{e^z}{(z-2)^3} dz$$

[6] Lec 10

$$\boxed{1} \int_{|z|=1} \sin z \, dz = 0$$

Solution

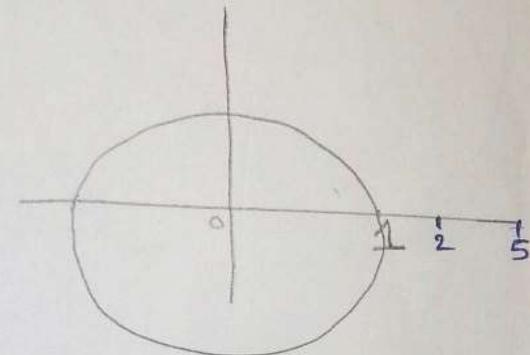
→ analytic

لدي وجه اصغر مقام

$$\boxed{2} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)}$$

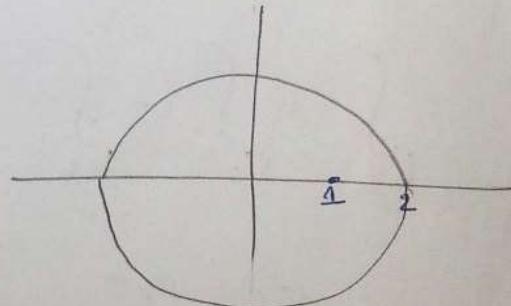
$z=2, z=5$  اصغر الحتان  
نقطة داخل المنعطف

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)} = 0$$



$$\boxed{3} \int_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z-1)}$$

$$= 2\pi i (1)^2 = 2\pi i$$

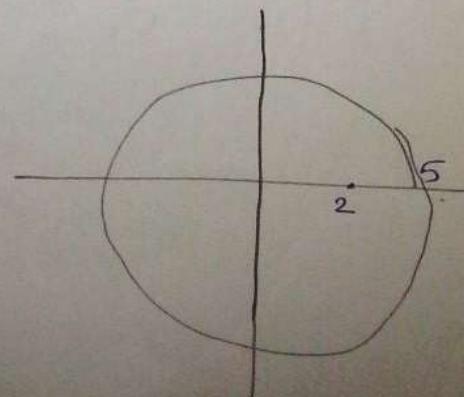


$$\boxed{4} \leftarrow \text{نقطة داخل الدائرة: } z=2$$

$$I = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2 e^z}{dz^2} \right|_{z=2}$$

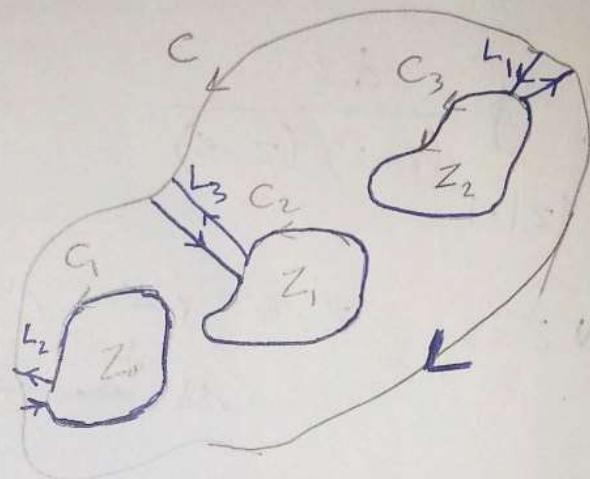
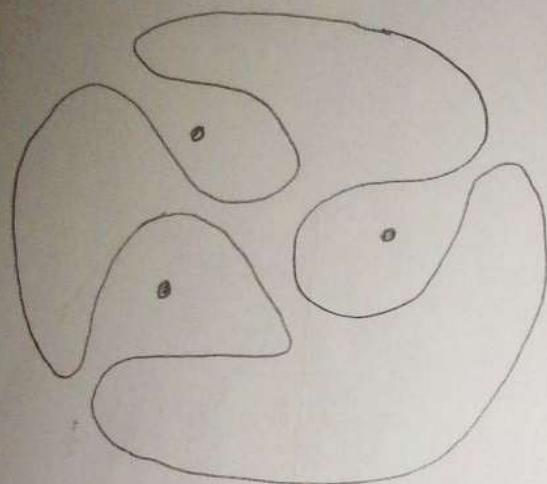
$$\boxed{I = \pi i e^2}$$

✓  $\boxed{7} \text{ Lec 10}$



## الأفكار

إذا وجد أكثر من قوس في المقام ويقع أحدهما داخل التكامل نستخدم



$$\int_{L_1} + \int_{C_3} - \int_{L_1} - \int_C + \int_{L_2} + \int_{C_1} - \int_{L_2} +$$

$$\int_{L_3} + \int_{C_2} - \int_{L_3} = 0 \rightarrow \text{(analytic)} \text{ لـ}$$

$$\therefore \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

ـ إذا وجد أكثر من هفر للفاصل  $\neq$  داخل المخزن تحويل كل هفر من أبعاد الفاصل ينبع منه معلم يحتوى  $\neq$  هفر للفاصل ولا يحتوىباقي ونستخدم المعرفة

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz$$

ـ مع الحد الأول نجعل القوس  $\arcsin(z)$  له صورة في المقام ونجعلباقي مقام البسط (كى نفرق تحليلية التفرقة)  
ـ مع الحد الثاني نجعل القوس  $\arcsin(z)$  في المقام ونجعلباقي مقام البسط . وهكذا .

2] قوسين في المقام واحد هفره يقع و الثاني هفره لا يقع نجعل الذي هفره لا يقع مقام البسط .

Ex: Evaluate

1]  $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-i)(z-5)} dz$

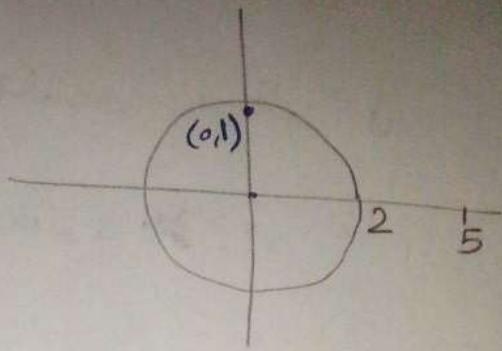
2]  $\int_{|z|=5} \frac{\cosh z}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$

3]  $\int_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-1)^2(z-6)} dz$

II

ـ تقع داخل المنحنى  $\leftarrow z = i$

ـ لا تقع داخل المنحنى  $\leftarrow z = 5$

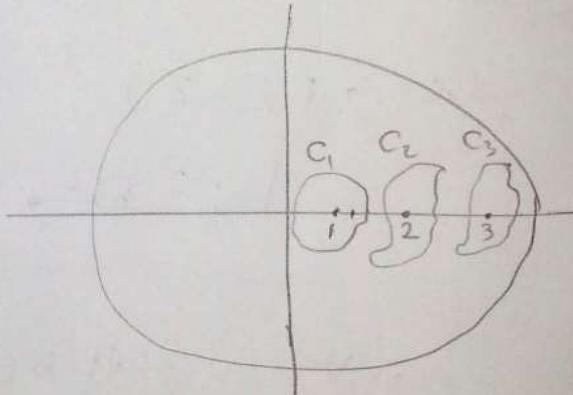


$$I = \oint \frac{\sin z}{z-i} dz = 2\pi i \left( \frac{\sin i}{i-5} \right)$$

$$= 2\pi i^2 \quad \cancel{\frac{\sinh i}{i-5}} = -2\pi \frac{\sinh i}{i-5}$$

2)  $z=1, z=2, z=3$  نقاط اعماق  
تقع داخل المنحنى

$$\oint_C \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$



$$= \oint \frac{\cosh z}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz + \oint \frac{\cosh z}{(z-1)(z-3)} dz + \oint \frac{\cosh z}{(z-1)(z-2)} dz$$

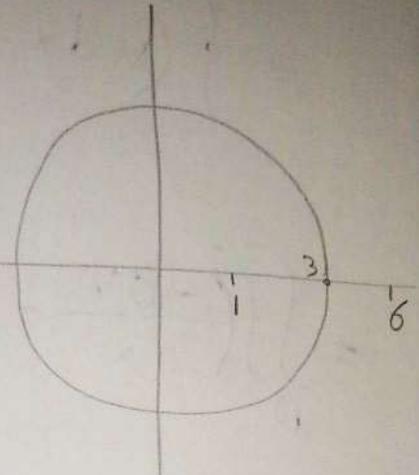
$$= 2\pi i \left( \frac{\cosh 1}{(-1)(-2)} \right) + 2\pi i \left( \frac{\cosh 2}{(1)(-1)} \right) + 2\pi i \left( \frac{\cosh 3}{(2)(1)} \right)$$

10)  $\alpha$  ecto

3

نقطة داخل المدار  $\leftrightarrow z = 1$

$$I = \oint_C \frac{z^2}{(z-6)} \frac{1}{(z-1)^2} dz$$



$$= \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z-6)} \right|_{z=1}$$

$$= 2\pi i \left. \frac{(z-6)2z - z^2 * 1}{(z-6)^2} \right|_{z=1} = 2\pi i \left[ \frac{(-5)(2) - 1}{25} \right]$$

**Ex** show that if  $f(z)$  is analytic on simple closed curve then  $\oint_C f(z) dz = 0$

Notes

→ Green theorem

~~$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$~~

sol

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy)$$

III Lec 10

$$= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy)$$

$$= \iint_D \left( \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \right)$$

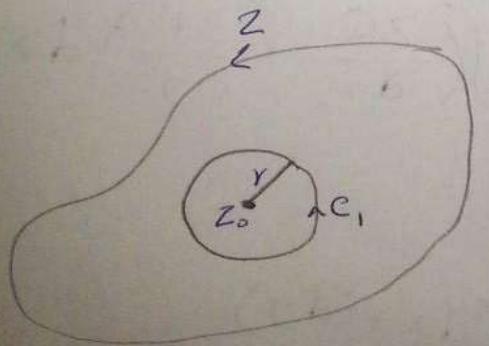
since  $f(z)$  is analytic  $u_x = v_y, u_y = -v_x$

$$\therefore \oint_C f(z) dz = 0 \quad \cancel{\cancel{}}$$

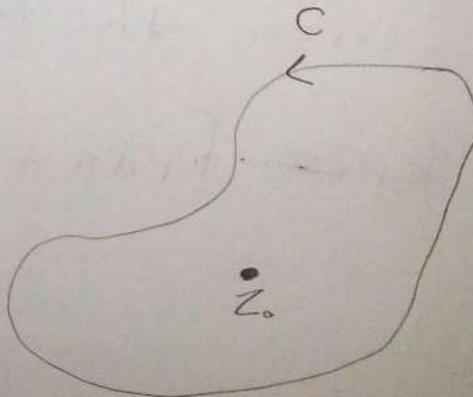
Ex

show that if  $f(z)$  is analytic on  $S \cdot C$  and  $z_0$  inside  $C$  then

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



↙ S o!



نحوی دایرہ مرکزها  $Z_0$  و نصف قطرها  $r$  نعرف

$$|z - z_0| = r$$

$$\oint_C f$$

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

$$|z - z_0| = r$$

$$z - z_0 = r e^{i\theta}$$

$$dz = i r e^{i\theta} d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \quad \text{as } r \rightarrow 0$$

$$r i f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

13 Lec 10